

Алгоритмы возмущений в нелинейных задачах

Лектор: д.ф.-м.н., профессор
Темирбеков Н.М.

Рассмотрим теперь сопряженную невозмущенную задачу

$$A^* u_* = p, \quad (10.1)$$

соответствующую основной задаче (9.1). Здесь A^* - оператор, сопряженный к A , с областью определения $D(A^*) \subset H, p \in H$. Задачу (10.1) будем считать разрешимой.

Так же как и в случае основной задачи, введем возмущенную сопряженную задачу

$$A_\varepsilon^* u_\varepsilon^* = p_\varepsilon, \quad (10.2)$$

причем δA^* - заданный оператор, действующий в H , с областью определения $D(A^*)$, $\delta p \in H$. Здесь мы ради общности считаем, что возмущается не только оператор A^* , но и функция измерения p . Обычно измерение физической величины (прибора) не меняется, и потому в большинстве практически интересных случаев $\delta p = 0$, т.е. $p_\varepsilon = p$. Но этого может и не быть.

$$u_\varepsilon^* = u_0^* + \varepsilon u_1^* + \varepsilon^2 u_2^* + \dots \quad (10.4)$$

$$A^* u_0^* = p,$$

$$A^* u_1^* = \delta p - \delta A^* u_0^*$$

$$A^* u_i^* = -\delta A^* u_{i-1}^*, \quad i = 2, 3, \dots \quad (10.5)$$

Если найти лишь функции $\{u_i^*\}_{i=1}^N$, то функцию

$$u_\varepsilon^{*(N)} = u_0^* + \varepsilon u_1^* + \dots + \varepsilon^N u_N^* \quad (10.6)$$

$$A_\varepsilon^* u_\varepsilon^* = p_\varepsilon \quad (10.7)$$

Где

$$A_\varepsilon^* = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i A_i^*, \quad A_0^* = A^*, \quad (10.8)$$

$$p_\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i p_i, \quad p_0 = p,$$

$$u_\varepsilon^* = u_0^* + \varepsilon u_1^* + \varepsilon^2 u_2^* + \dots$$

Тогда обычным приемом члены приходим к системе уравнений

$$A^* u_0^* = p,$$

$$A^* u_1^* = p_1 - A_1^* u_0^*,$$

$$A^* u_2^* = p_2 - A_1^* u_1^* - A_2^* u_0^*, \quad (10.9)$$

.....

$$A^* u_n^* = p_n - \sum_{k=1}^n A_k^* u_{n-k}^*.$$

Последовательно решая эти уравнения, можно найти $u_\varepsilon^{*(N)}$ по формуле (10.6).

В заключение приведем пример. Пусть в пространстве $H = L_2(0,1)$ действует оператор A , определенный дифференциальным выражением

$$Au = -\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{du}{dx},$$

С областью определения $D(A)$, введенной в Л.1. Тогда задача (9.1) имеет вид

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} = f, \quad x \in (0,1), \quad u(0) = u(1) = 0. \quad (10.10)$$

$$-\frac{d^2 u^*}{dx^2} - \frac{du^*}{dx} = p, x \in (0,1), u^*(0) = u^*(1) = 0. \quad (10.11)$$

$$-\frac{d^2 u_\varepsilon^*}{dx^2} - (1 + \varepsilon g(x)) \frac{du_\varepsilon^*}{dx} = p, u_\varepsilon^*(0) = u_\varepsilon^*(1) = 0. \quad (10.12)$$

Здесь $p_\varepsilon = p$, $\delta A^* u_\varepsilon^* = -\frac{g(x)(du^*)}{dx}$, $g(x)$ – достаточно гладкая функция.

$$-\frac{d^2 u_0^*}{dx^2} - \frac{du_0^*}{dx} = p, \quad u_0^*(0) = u_0^*(1) = 0,$$

$$-\frac{d^2 u_1^*}{dx^2} - \frac{du_1^*}{dx} = g(x) \frac{du_0^*}{dx}, u_1^*(0) = u_1^*(1) = 0, \quad (10.13)$$

$$-\frac{d^2 u_i^*}{dx^2} - \frac{du_i^*}{dx} = g(x) \frac{du_{i-1}^*}{dx}, u_i^*(0) = u_i^*(1) = 0,$$

$$i = 2, 3, \dots$$

$$u_\varepsilon^{*(1)} = u_0^* + \varepsilon u_1^*.$$

$$A\varphi = \lambda\varphi \quad (10.14)$$

$$(A\varphi, \varphi^*) = (\varphi, A^* \varphi^*). \quad (10.15)$$

$$A^* \varphi^* = \lambda \varphi^* \quad (10.16)$$

$$A_\varepsilon \varphi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon \varphi_\varepsilon, \quad (10.17)$$

$$A\varphi = \lambda\varphi + f \quad (10.18)$$

$$A^* \varphi^* = \lambda \varphi^* \quad (10.19)$$

$$(f, \varphi^*) = 0. \quad (10.20)$$

$$A_\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i A^{(i)} \quad (10.21)$$

$$\lambda_\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \lambda^{(i)}, \quad \lambda^{(0)} = \lambda,$$

$$\varphi_\varepsilon = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon^i \varphi^{(i)}, \quad \varphi^{(0)} = \varphi, \quad (10.22)$$

сходящихся в некоторой области $\varepsilon = 0$.

степенях ε , получаем систему

$$(A - \lambda^{(0)} E) \varphi^{(0)} = 0, \lambda^{(0)} = \lambda, \quad \varphi^{(0)} = \varphi,$$

$$(A - \lambda^{(0)} E) \varphi^{(1)} = \lambda^{(1)} \varphi^{(0)} - A^{(1)} \varphi^{(0)},$$

..... (10.23)

$$(A - \lambda^{(0)} E) \varphi^{(n)} = \sum_{i=1}^n \lambda^{(i)} \varphi^{(n-i)} - \sum_{i=1}^n A^{(i)} \varphi^{(n-i)},$$

.....
где E - тождественный оператор, т.е. $E\varphi = \varphi$. Систему уравнений (10.23) перепишем в виде

$$\begin{aligned} (A - \lambda^{(0)} E) \varphi^{(0)} &= 0, \\ (A - \lambda^{(0)} E) \varphi^{(1)} &= f_1, \end{aligned}$$

..... (10.24)

$$(A - \lambda^{(0)} E) \varphi^{(n)} = f_n,$$

.....

Здесь f_n ($n = 1, 2, \dots$) определяется формулами

$$f_n = \sum_{i=1}^n \lambda^{(i)} \varphi^{(n-i)} - \sum_{i=1}^n A^{(i)} \varphi^{(n-i)}. \quad (10.25)$$

$$\lambda^{(1)}(\varphi^{(0)}, \varphi^*) - (A^{(1)} \varphi^{(0)}, \varphi^*) = 0,$$

$$\begin{aligned} \lambda^{(2)}(\varphi^{(0)}, \varphi^*) + \lambda^{(1)}(\varphi^{(1)}, \varphi^*) - (A^{(2)} \varphi^{(0)} + A^{(1)} \varphi^{(1)}, \varphi^*) \\ = 0, \end{aligned}$$

.....(10.26)

$$\lambda^{(1)} = \frac{A^{(1)}\varphi^{(0)}, \varphi^*}{\varphi^{(0)}, \varphi^*} \quad (10.28)$$

$$f_1 = \lambda^{(1)}\varphi^{(0)} - A^{(1)}\varphi^{(0)}. \quad (10.29)$$

$$\lambda^{(2)} = \frac{(A^{(2)}\varphi^{(0)} + A^{(1)}\varphi^{(1)}, \varphi^*) - \lambda^{(1)}(\varphi^{(1)}, \varphi^*)}{\varphi^{(0)}, \varphi^*}. \quad (10.30)$$

$$f_2 = \lambda^{(2)}\varphi^{(0)} + \lambda^{(1)}\varphi^{(1)} - A^{(2)}\varphi^{(0)} - A^{(1)}\varphi^{(1)} \quad (10.31)$$

$$(A - \lambda^{(0)}E)\varphi^{(2)} = f_2. \quad (10.32)$$

$$(u, v) = \int_0^1 u(x)v(x)dx, u, v \in H \quad (10.33)$$

$$A\varphi = -2\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \varphi, \varphi \in D(A), \quad (10.34)$$

$$-2\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \varphi = \lambda\varphi, x \in (0,1), \varphi(0) = \varphi(1) = 0. \quad (10.35)$$

$$\lambda_i = 2\pi^2 i^2 + 1, \quad (10.36)$$

$$A_\varepsilon = A + \varepsilon A^{(A)}, \quad (10.37)$$

где $-1 \leq \varepsilon \leq 1$, $A^{(1)}$ - линейный оператор вида

$$A^{(1)}\varphi = -\frac{d}{dx}p(x)\frac{d\varphi}{dx} + q(x)\varphi(x), \quad \varphi \in D(A), \quad (10.38)$$

а функции $p(x)$, $q(x)$ пусть заданы в виде

$$p(x) = 1 + \sin\pi x, \quad q(x) = -2\pi^2 \sin\pi x.$$

$$-\frac{d}{dx}(2 + \varepsilon p(x))\frac{d\varphi_\varepsilon}{dx} + (1 + \varepsilon q(x))\varphi_\varepsilon(x) = \lambda u, \quad (10.39)$$

$$x \in (0,1), \varphi_\varepsilon(0) = \varphi_\varepsilon(1) = 0.$$

$$\lambda^{(0)} = 2\pi^2 + 1, \quad \varphi^{(0)} = \varphi^* = \sqrt{2} \sin \pi x. \quad (10.40)$$

$$\lambda^{(1)} = (A^{(1)}\varphi^{(0)}, \varphi^*) = \int_0^1 p(x) \left(\frac{d\varphi^{(0)}}{dx} \right)^2 dx + \int_0^1 q(x) (\varphi^{(0)})^2 dx = 2\pi^2 \int_0^1 (1 +$$

$$\begin{aligned}\lambda_\varepsilon &\approx \lambda^{(0)} + \varepsilon\lambda^{(1)} + \varepsilon\lambda^{(2)} \\ &= 2\pi^2 + 1 + \varepsilon(\pi^2 - 4\pi) - \varepsilon^2(\pi^2 + 8). \quad (10.45)\end{aligned}$$

Далее, зная $\lambda^{(2)}$, мы можем вычислить f_2 по формуле (10.31), решить задачу (10.32) и найти $\varphi^{(2)}$ затем $\lambda^{(3)}$ и т.д.

Таким образом, описанный алгоритм возмущений позволяет найти возмущенное собственное значение $\lambda_\varepsilon = \lambda_\varepsilon^{(1)}$ с любой наперед заданной точностью по ε . Аналогичным образом можно вычислить любое собственное значение $\lambda_\varepsilon^{(k)}$ ($k = 2, 3, \dots$) задачи (10.39).

Список литературы:

1.Марчук Г.И. Сопряженные уравнения: Курс лекций.-М.:ИВМ РАН, 2000. – 175 с.